

Les Mathématiques

Les **mathématiques** sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles sont aussi le domaine de recherche développant ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

Elles possèdent plusieurs branches telles que : *l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse, la géométrie, la logique mathématique*, etc. Il existe également une certaine séparation entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

Bien que les résultats mathématiques soient des vérités purement formelles, ils trouvent cependant des applications dans les autres sciences et dans différents domaines de la technique.



Table de division et de conversion des fractions, écriture cunéiforme

Histoire : Il est probable que l'homme ait développé des compétences mathématiques avant l'apparition de l'écriture. Les premiers objets reconnus attestant de compétences calculatoires sont les bâtons de comptage, tels que l'os d'*Ishango* (en Afrique) datant **de 20 000 ans avant notre ère**. Le développement des mathématiques en tant que connaissance transmise dans les premières civilisations est lié à leurs applications concrètes : *le commerce, la gestion des récoltes, la mesure des surfaces, la prédiction des événements astronomiques*, et parfois l'exécution de *rituels religieux*.

Les premiers développements mathématiques concernaient l'extraction des racines carrées, des racines cubiques, la résolution d'*équations polynomiales*, *la trigonométrie*, *le calcul fractionnaire*, *l'arithmétique des entiers naturels*... Ils s'effectuèrent dans les civilisations *akkadienne, babylonienne, égyptienne, chinoise* ou encore de la vallée de l'Indus.

Durant la « renaissance du **XII^e siècle** », une partie des textes grecs et arabes sont étudiés et traduits en latin. La recherche mathématique se concentre en Europe. Au **XVI^e siècle** se développe l'idée qu'il existe une science universelle sur laquelle il est possible de fonder l'ensemble des connaissances. *Descartes* voit dès 1629, dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, les possibilités qu'offrent les mathématiques pour jouer ce rôle. Il souligne, dans le *Discours de la méthode*, l'attrait des mathématiques, « à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons ». Le calcul algébrique se développe alors à la suite des travaux de *Viète* et de *Descartes*. *Newton* et *Leibniz*, indépendamment, inventent *le calcul infinitésimal*.

Au **XVII^e siècle**, *Galilée* se rend compte que les mathématiques sont l'outil idéal pour décrire le monde physique, ce qu'on peut résumer en disant que les lois de la Nature sont écrites en langage mathématique. Les mathématiques constituent donc, avec la démarche expérimentale, l'un des deux piliers du développement de la Science moderne.

Au cours du **XVIII^e siècle** et du **XIX^e siècle**, les mathématiques connaissent de forts développements avec l'étude systématique des structures, à commencer par les groupes issus des travaux de *Galois* sur les équations polynomiales, et les anneaux introduits par *Dedekind*.

Le **XIX^e siècle** voit le développement d'une *théorie axiomatique* sur tous les objets étudiés, soit la recherche des fondements mathématiques. Ce développement de l'axiomatique conduira plusieurs mathématiciens du **XX^e siècle** à chercher à définir toutes les mathématiques à l'aide d'un langage, *la logique mathématique*.

Le **XX^e siècle** a connu un fort développement en mathématiques avec une spécialisation des domaines, et la naissance ou le développement de nombreuses nouvelles branches (*théorie de la mesure, théorie*

$$\begin{aligned}
 Q &= mc \Delta t & R &= \frac{U}{I} & k &= z \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)} & \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 \sum I_i \\
 \beta &= \frac{\Delta I_c}{\Delta I_B} & E &= \frac{1}{2} \hbar \omega_m & \omega &= 2\pi f & \vec{C} \cdot \vec{p} &= \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Phi = \frac{2\pi \sin^2 \alpha}{\lambda} \\
 f_0 &= \frac{1}{2\pi \tau_{CL}} & \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) & \vec{A} &= \frac{1}{T} \int \vec{v} \cdot d\vec{S} & \vec{A} &= \vec{b} \\
 R &= \rho \frac{L}{S} & \vec{F}_v &= \int \vec{F}_n & E &= mc^2 & f_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \\
 k &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} & \sigma &= \frac{Q}{S} & I_m &= \int \vec{J} \cdot d\vec{S} & \vec{F}_m &= \vec{B} \cdot I \vec{\ell} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \\
 v &= \frac{nh}{2\pi r m_e} & M_0 &= \frac{4\pi^2 r^3}{3} & \vec{B} &= \mu_0 \frac{NI}{\ell} & \vec{F}_g &= \frac{m_1 m_2}{r^2} \\
 M &= \vec{F} \cdot d \cos \alpha & T &= \frac{4\pi n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} & p &= \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} & F_n &= Sh \rho g \\
 \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q^* & m_c &= N m_0 & F_x &= \frac{1}{2} C_x \rho \beta^2 & \frac{m_1}{x} &+ \frac{m_2}{x'} = \frac{m_2 - m_1}{r} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}
 \end{aligned}$$

spectrale, topologie algébrique et géométrie algébrique, par exemple). **L'informatique** a eu un impact sur la recherche. D'une part, elle a facilité la communication et le partage des connaissances, d'autre part, elle a fourni un formidable outil pour la confrontation aux exemples. Ce mouvement a naturellement conduit à la *modélisation* et à la *numérisation*.

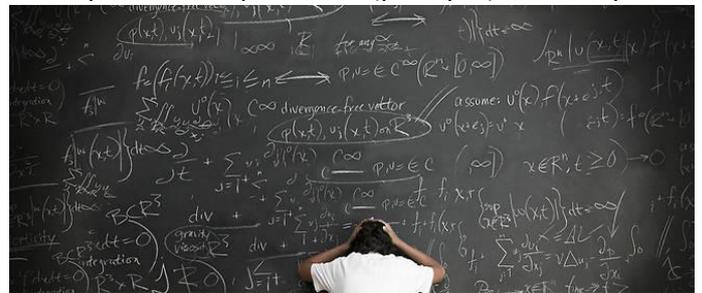


Informatique : L'essor des techniques au **XX^e siècle** a ouvert la voie à une nouvelle science, **l'informatique**. Celle-ci est étroitement liée aux mathématiques, de diverses manières : certains pans de la recherche en informatique théorique peuvent être considérés comme d'essence mathématique, d'autres branches de l'informatique faisant plutôt usage des mathématiques. Les nouvelles technologies de communication ont quant à elles ouvert la voie aux applications à des branches des mathématiques parfois très anciennes (arithmétique), notamment en ce qui concerne les problèmes de sécurité des transmissions : *cryptographie* et *théorie des codes*.

En contrepartie, les sciences informatiques influencent l'évolution moderne des mathématiques.

L'informatique est également devenue un outil essentiel à la découverte ou à la démonstration de certains théorèmes mathématiques. L'exemple le plus célèbre est celui du *Théorème des quatre couleurs*, démontré en 1976 à l'aide d'un ordinateur, car certains des calculs nécessaires sont trop complexes pour être réalisés à la main. Cette évolution bouleverse les mathématiques traditionnelles, où la règle était que le mathématicien puisse vérifier de lui-même chaque partie de la démonstration. En 1998, la *Conjecture de Kepler* semble avoir également été démontrée par ordinateur, et une équipe internationale travaille depuis sur la rédaction d'une preuve formelle.

En effet, si la preuve est rédigée de façon formelle, il devient alors possible de la vérifier à l'aide d'un logiciel particulier, appelé *assistant de preuve*. C'est la meilleure technique connue pour être (presque) certain qu'une démonstration assistée par ordinateur ne souffre d'aucun bug. En l'espace d'une trentaine d'années, le rapport entre les mathématiciens et l'informatique s'est donc complètement renversé : d'abord instrument suspect à éviter si possible dans l'activité mathématique, *l'ordinateur est devenu au contraire un outil incontournable*.



Sciences humaines : Le rapport des mathématiques avec les sciences humaines se fait essentiellement par les *statistiques* et les *probabilités*, mais aussi par des *équations différentielles*, *stochastiques* ou non, utilisées en *sociologie*, *psychologie*, *économie*, *finance*, *gestion d'entreprise*, *linguistique*...

Cependant une mathématisation des sciences humaines n'est pas sans danger. Dans l'essai polémique *Impostures intellectuelles*, Sokal et Bricmont dénoncent la relation, non fondée ou abusive, d'une terminologie scientifique, en particulier mathématique et physique, dans le domaine des sciences humaines. L'étude de systèmes complexes (*évolution du chômage*, *capital d'une entreprise*, *évolution démographique d'une population*...) fait appel à des connaissances mathématiques élémentaires, mais *le choix des critères de comptage, notamment dans le cas du chômage, ou de la modélisation peut être sujet à polémique*.

